

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2017-2018

Prova scritta in aula del 19.06.2018

Parte II - Testo 1

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C,  $M_C$ .

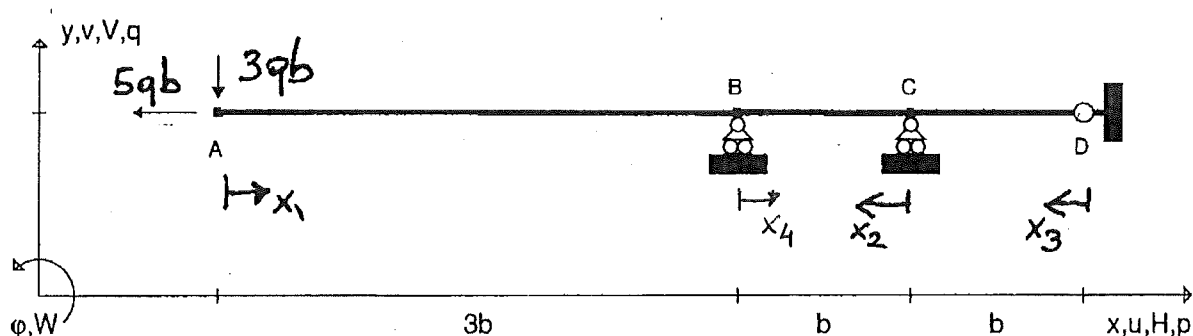
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto A,  $v_A$ .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 19.06.18\*001



## Esercizio n. 2 (7 punti)

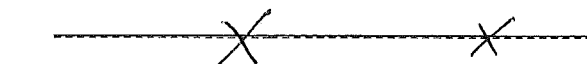
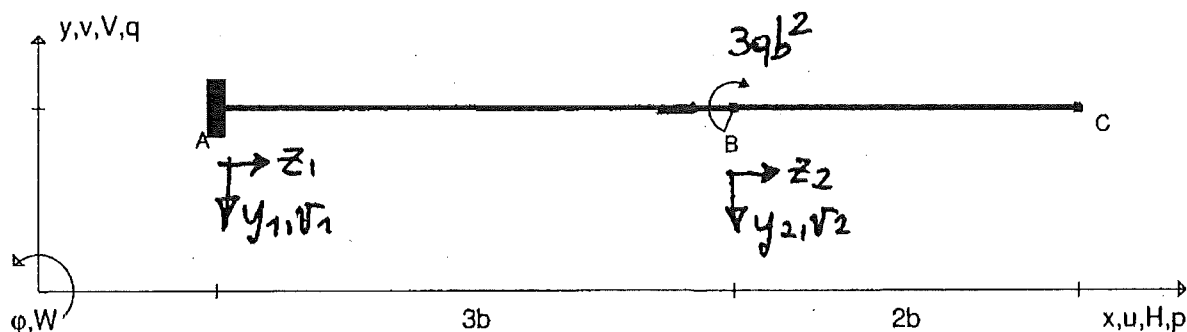
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

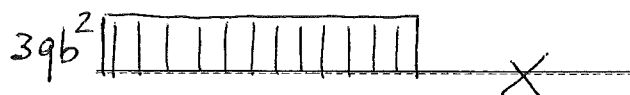
1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $B$ ,  $v_B$ ;
4. La rotazione del punto  $C$ ,  $\theta_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 19.06.18\*001



$\uparrow (+) \downarrow$



$\uparrow (+) \downarrow$

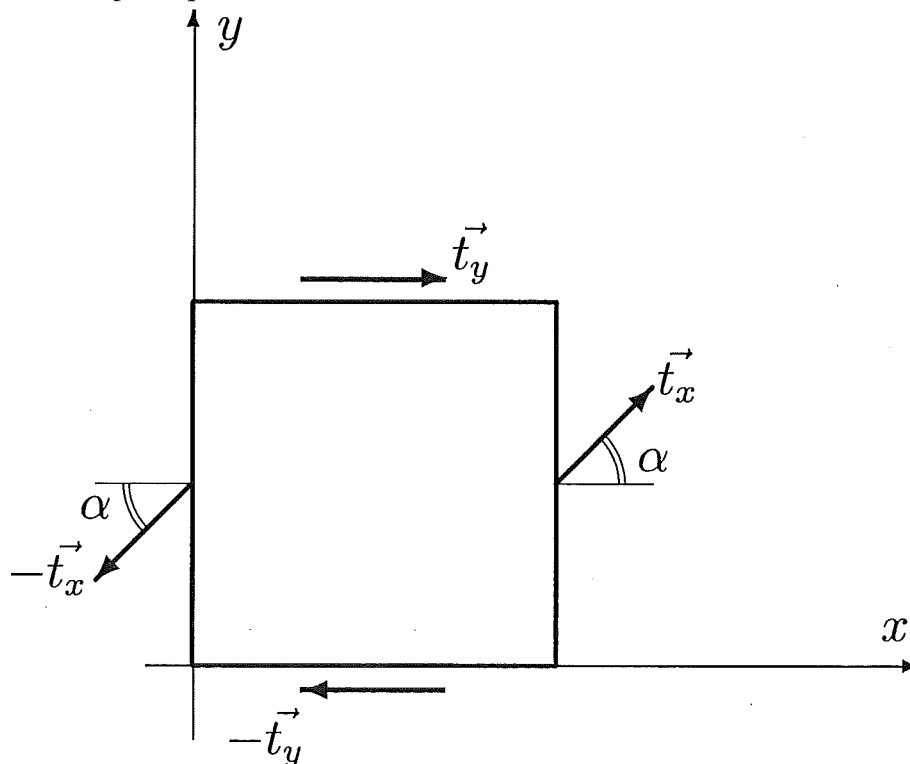
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & V_A (\Uparrow) &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & M_A (\curvearrowright) &= \dots\dots\dots 3qb^2 \dots\dots\dots; \\
 N_{AB} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & T_{AB} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & M_{AB} &= \dots\dots\dots -3qb^2 \dots\dots\dots; \\
 N_{BC} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & T_{BC} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; & M_{BC} &= \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots; \\
 \text{c.c in A} &= \dots\dots\dots \begin{cases} v_1(z_1=0) = 0 \\ v_1'(z_1=0) = 0 \end{cases} \dots\dots\dots; & \text{c.c in B} &= \dots\dots\dots \begin{cases} v_1(z_1=3b) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=3b) = v_2'(z_2=0) \end{cases} \dots\dots\dots; \\
 \text{c.c in C} &= \dots\dots\dots // \dots\dots\dots; \\
 v_1(z_1) &= \dots\dots\dots + \frac{3}{2} \frac{qb^2 z_1^2}{EI} \dots\dots\dots; & v_1'(z_1) &= \dots\dots\dots 3 \frac{qb^2 z_1}{EI} \dots\dots\dots; \\
 v_2(z_2) &= \dots\dots\dots \frac{27}{2} \frac{qb^4}{EI} + 9 \frac{qb^3 z_2}{EI} \dots\dots\dots; & v_2'(z_2) &= \dots\dots\dots 9 \frac{qb^3}{EI} \dots\dots\dots; \\
 v_B &= \dots\dots\dots + \frac{27}{2} \frac{qb^4}{EI} (\downarrow) \dots\dots\dots; & \theta_C &= \dots\dots\dots + 9 \frac{qb^3}{EI} (\curvearrowright) \dots\dots\dots;
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -60^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = 1/2$ ;  $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 40\sqrt{3}$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

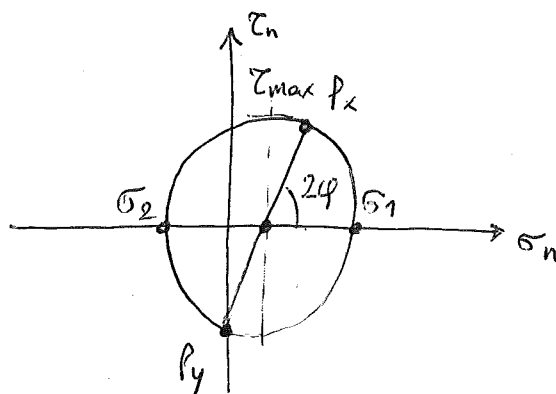
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 34.6410 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -60.0000 \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 79.7705 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -45.1295 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 62.4500 \text{ (MPa)};$$

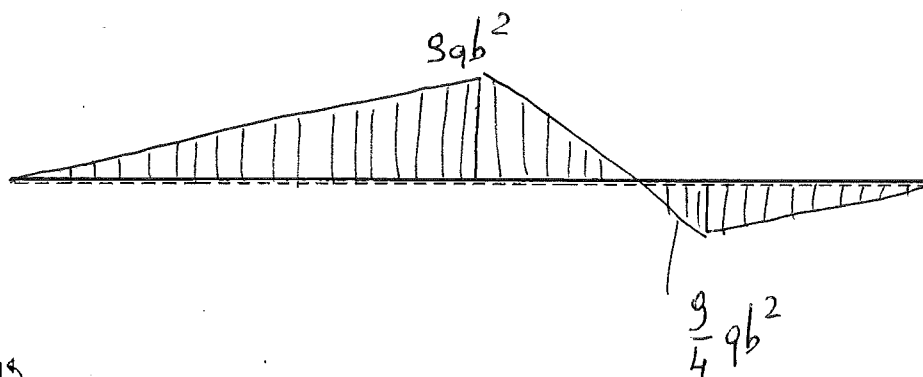
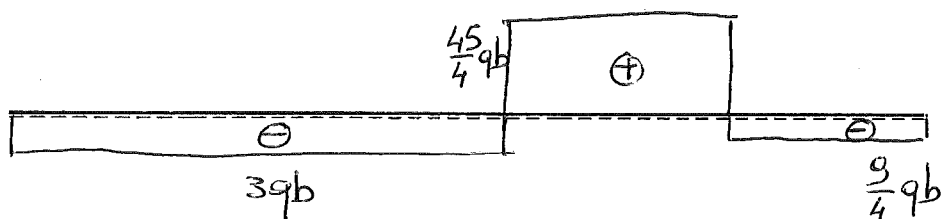
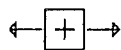
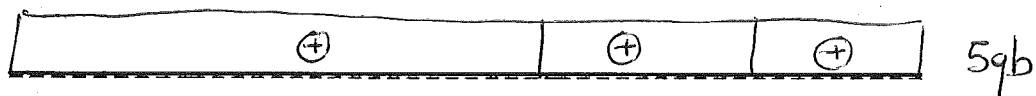
cerchio di Mohr:



$$P_x = (34.6410, +60.0000)$$

$$P_y = (0.0000, -60.0000)$$

$$\varphi = -36.8489 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \frac{57}{4}qb; V_C(\uparrow) = -\frac{27}{2}qb; H_D(\rightarrow) = 5qb; V_D(\uparrow) = \frac{9}{4}qb; M_C(\curvearrowright) = \frac{9}{4}qb^2; \\
 N_{AB} &= 5qb; T_{AB} = -3qb; M_{AB} = -3qb \cdot x_1; \\
 N_{CB} &= 5qb; T_{CB} = \frac{45}{4}qb; M_{CB} = \int +\frac{9}{4}qb^2 - \frac{45}{4}qb \cdot x_2; \\
 N_{DC} &= 5qb; T_{DC} = -\frac{9}{4}qb; M_{DC} = \int \frac{9}{4}qb^2 + \frac{45}{2}qb \cdot x_3; \\
 v_A &= -\frac{279}{8} \frac{qb^4}{EI} (\downarrow)
 \end{aligned}$$

**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2017-2018

Prova scritta in aula del 19.06.2018

Parte II - Testo 2

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità  $C$ ,  $M_C$ .

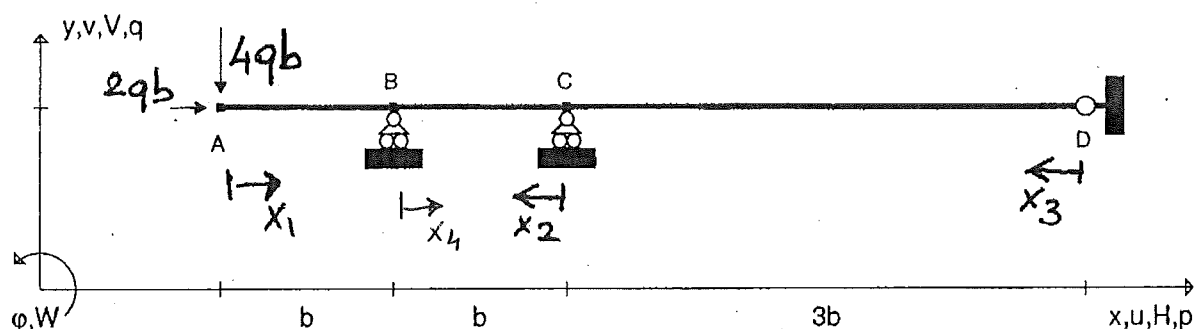
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto  $A$ ,  $v_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 19.06.18\*002



## Esercizio n. 2 (7 punti)

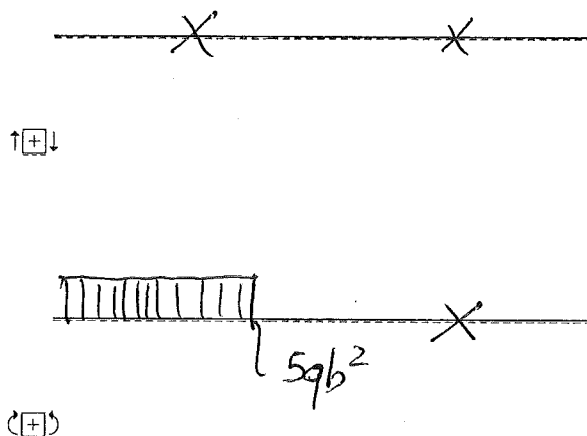
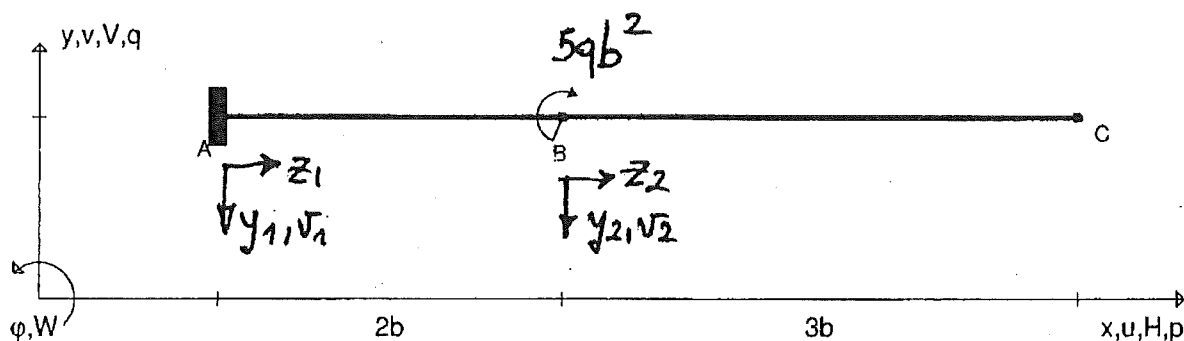
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $B$ ,  $v_B$ ;
4. La rotazione del punto  $C$ ,  $\theta_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 19.06.18\*002



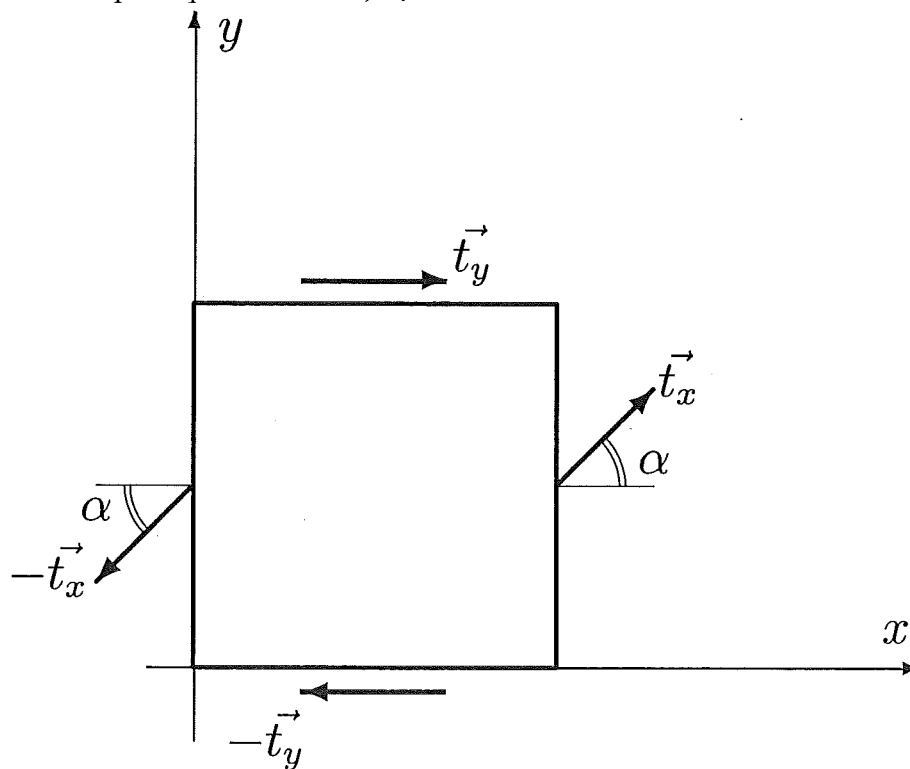
$$\begin{aligned}
 H_A (\Rightarrow) &= 0; & V_A (\Uparrow) &= 0; & M_A (\curvearrowright) &= 5qb^2; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 0; & M_{AB} &= -5qb^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= 0; \\
 \text{c.c in A} &= \begin{cases} v_1(z_1=0) = 0 \\ v_1'(z_1=0) = 0 \end{cases}; & \text{c.c in B} &= \begin{cases} v_1(z_1=2b) = v_2(z_2=0) \\ v_1'(z_1=2b) = v_2'(z_2=0) \end{cases}; \\
 \text{c.c in C} &= //; \\
 v_1(z_1) &= \frac{+5}{2} \frac{qb^2 z_1^2}{EI}; & v_1'(z_1) &= \frac{5}{EI} qb^2 z_1; \\
 v_2(z_2) &= \frac{10}{EI} \frac{qb^4}{4} + \frac{10}{EI} \frac{qb^3 z_2}{3}; & v_2'(z_2) &= \frac{10}{EI} \frac{qb^3}{3}; \\
 v_B &= \frac{+10}{EI} \frac{qb^4}{4} (4); & \theta_C &= \frac{+10}{EI} \frac{qb^3}{3} (\searrow).
 \end{aligned}$$

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$ , rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = -30^\circ$  (sicché  $\sin \alpha = -1/2$ ;  $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 60\sqrt{3}$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

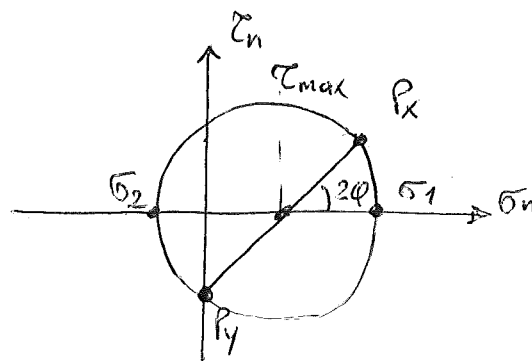
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = 90.0000 \dots \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0.0000 \dots \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -51.9615 \dots \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = 113.7386 \dots \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -23.7386 \dots \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 68.7386 \dots \text{ (MPa)};$$

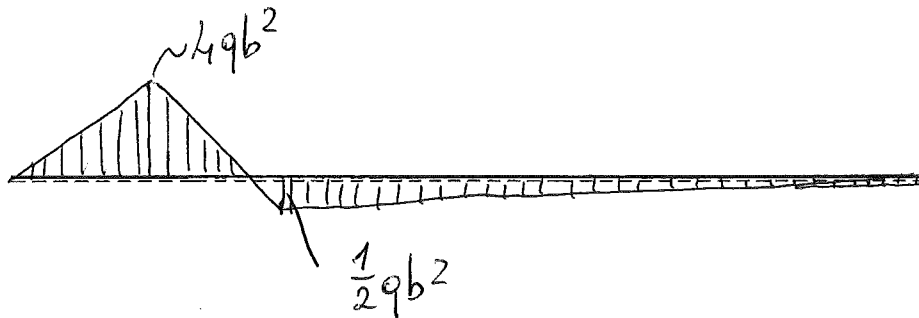
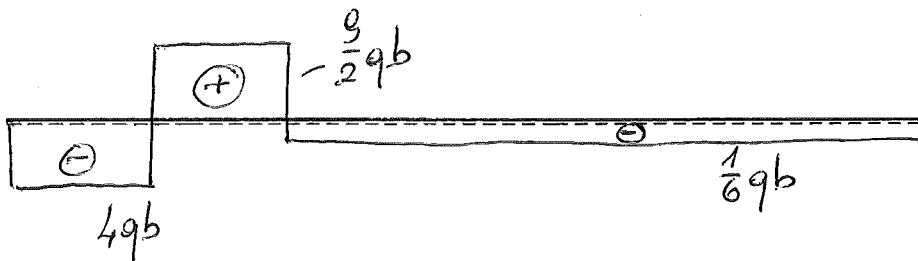
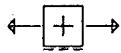
cerchio di Mohr:



$$P_x = (90.0000, +51.9615)$$

$$P_y = (0.0000, -51.9615)$$

$$\varphi = -24.5533 \dots (^\circ);$$



$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \frac{17}{2}qb; \quad V_C(\uparrow) = -\frac{14}{3}qb; \quad H_D(\rightarrow) = -2qb; \quad V_D(\uparrow) = \frac{1}{6}qb; \quad M_C(\curvearrowright) = \frac{1}{2}qb^2; \\
 N_{AB} &= -2qb; \quad T_{AB} = -4qb; \quad M_{AB} = -4qb \times 1; \\
 N_{CB} &= -2qb; \quad T_{CB} = \frac{9}{2}qb; \quad M_{CB} = \int \left( \frac{1}{2}qb^2 - \frac{9}{2}qbx_2 \right) dx_2; \\
 N_{DC} &= -2qb; \quad T_{DC} = -\frac{1}{6}qb; \quad M_{DC} = \frac{1}{6}qb \times 3; \\
 v_A &= -\frac{31}{12} \frac{qb^4}{EI} \quad (\downarrow)
 \end{aligned}$$



**CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI**

A.A. 2017-2018

Prova scritta in aula del 19.06.2018

Parte II - Testo 3

CdS Edilizia ☐

CdS AdC ☐

CdS SdA ☐

*Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.*

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

**Esercizio n. 1 (17 punti)**

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C,  $M_C$ .

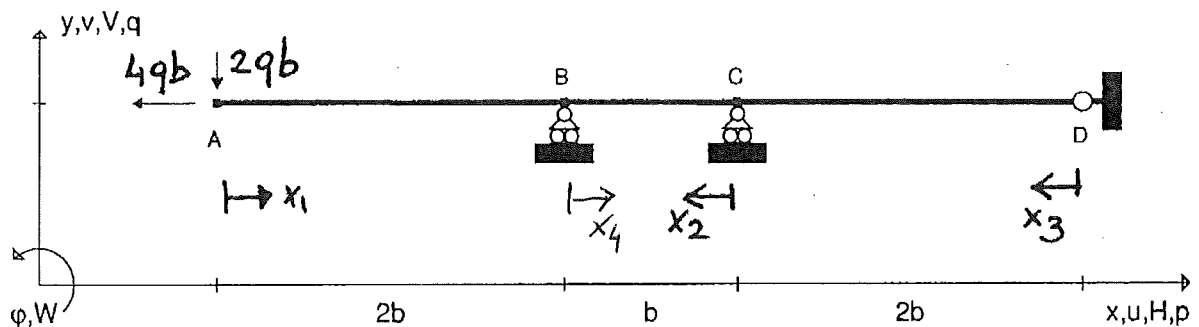
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, lo spostamento verticale del punto A,  $v_A$ .

*Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.*

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 19.06.18\*003



## Esercizio n. 2 (7 punti)

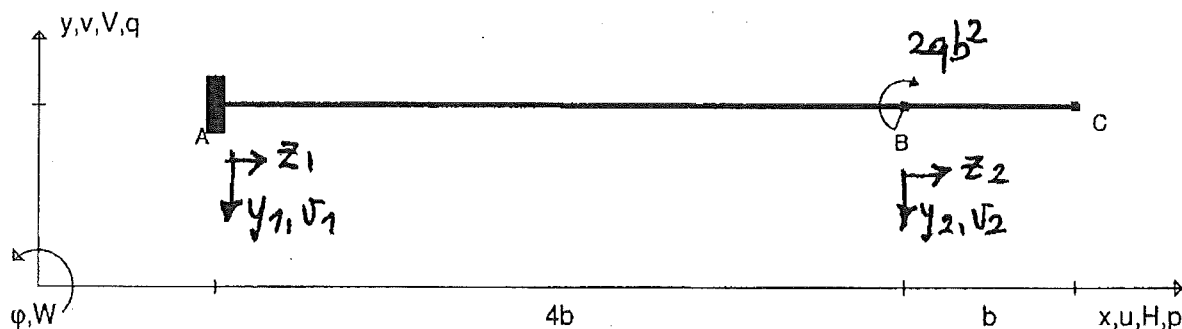
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti  $A$ ,  $B$  e  $C$ .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse,  $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$ ;
2. La sua derivata prima,  $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$ ;
3. Lo spostamento verticale del punto  $B$ ,  $v_B$ ;
4. La rotazione del punto  $C$ ,  $\theta_C$ .

Universita' di Cagliari

SdC\_SdA 19.06.18\*003



$\uparrow \oplus \downarrow$



$\curvearrowright \oplus \curvearrowleft$

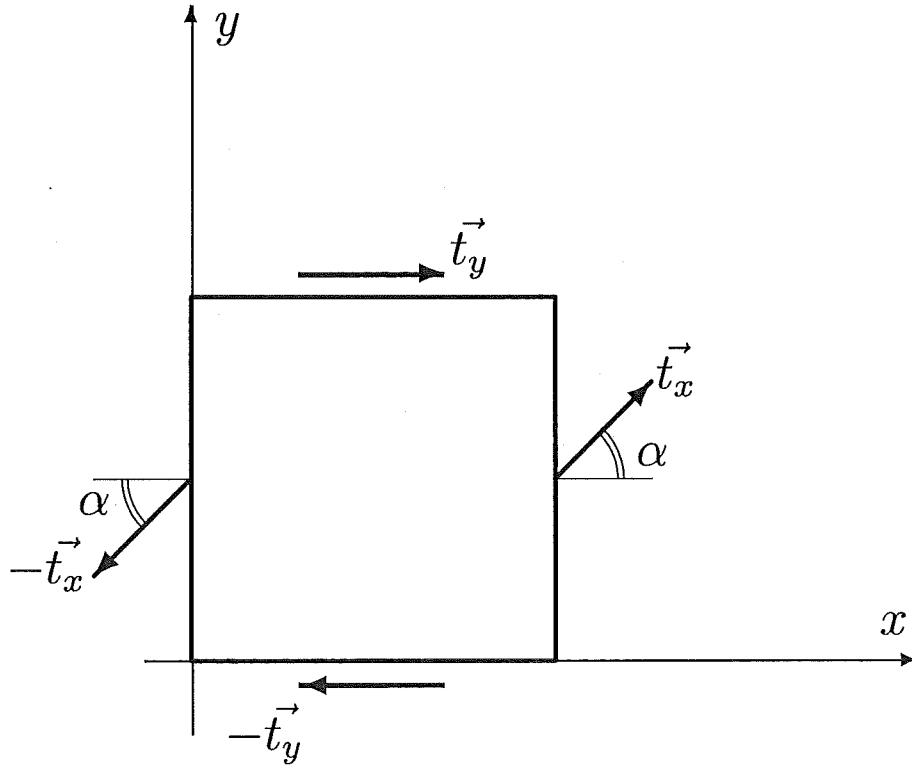
|  |  |  |   |  |  |  |  |  |
|--|--|--|---|--|--|--|--|--|
| $H_A (\Rightarrow) = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$                      |  |  | $V_A (\uparrow) = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$  |  |  | $M_A (\curvearrowright) = \dots\dots\dots 2qb^2 \dots\dots\dots$ |  |  |
| $N_{AB} = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$                                 |  |  | $T_{AB} = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$  |  |  | $M_{AB} = \dots\dots\dots -2qb^2 \dots\dots\dots$                |  |  |
| $N_{BC} = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$                                 |  |  | $T_{BC} = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$  |  |  | $M_{BC} = \dots\dots\dots 0 \dots\dots\dots$                     |  |  |
| c.c in A = $\begin{cases} v_1 _{z_1=0} = 0 \\ v_1' _{z_1=0} = 0 \end{cases}$ |  |  | c.c in B = $\begin{cases} v_1 _{z_1=4b} = v_2 _{z_2=0} \\ v_1' _{z_1=4b} = v_2' _{z_2=0} \end{cases}$ |  |  | c.c in C = $\parallel$   |  |  |
| $v_1(z_1) = \frac{qb^2 z_1^2}{EI}$   |  |  | $v_1'(z_1) = 2 \frac{qb^2 z_1}{EI}$   |  |  |  |  |  |
| $v_2(z_2) = \frac{16}{EI} \frac{qb^4}{4} + 8 \frac{qb^3 z_2}{EI}$            |  |  | $v_2'(z_2) = 8 \frac{qb^3}{EI}$   |  |  |  |  |  |
| $v_B = \frac{+16 qb^4}{EI}$  |  |  | $\theta_C = \frac{+8 qb^3}{EI}$   |  |  | $(\curvearrowright)$   |  |  |

### Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi  $x$  e  $y$  ai vettori sforzo (piani)  $\vec{t}_x$  e  $\vec{t}_y$  rispettivamente; di questi  $\vec{t}_x$  è inclinato rispetto all'asse  $x$  di un angolo  $\alpha = 0^\circ$  (sicché  $\cos \alpha = 1$ ;  $\sin \alpha = 0$ ) e ha modulo di valore  $|\vec{t}_x| = 80\sqrt{3}$  MPa. L'altro vettore sforzo,  $\vec{t}_y$ , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali,  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ , e la massima tensione tangenziale,  $\tau_{\max}$ .

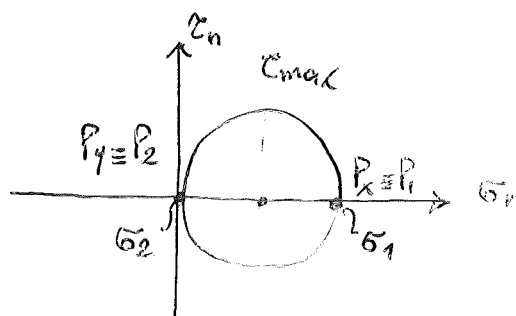
Determinare inoltre quanto vale l'angolo  $\varphi$  formato dall'asse  $x$  e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo,  $\sigma_1$ .



$$\sigma_x = \underline{138.5641} \dots \text{ (MPa)}; \sigma_y = \underline{0.0000} \dots \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = \underline{0.0000} \dots \text{ (MPa)};$$

$$\sigma_1 = \underline{138.5641} \dots \text{ (MPa)}; \sigma_2 = \underline{0.0000} \dots \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = \underline{69.2820} \dots \text{ (MPa)};$$

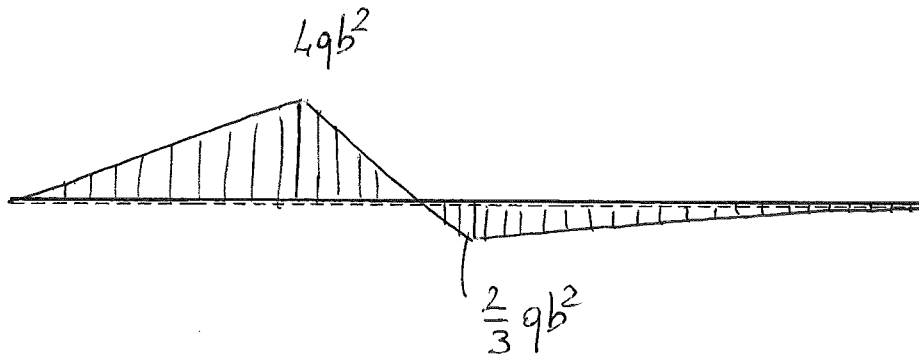
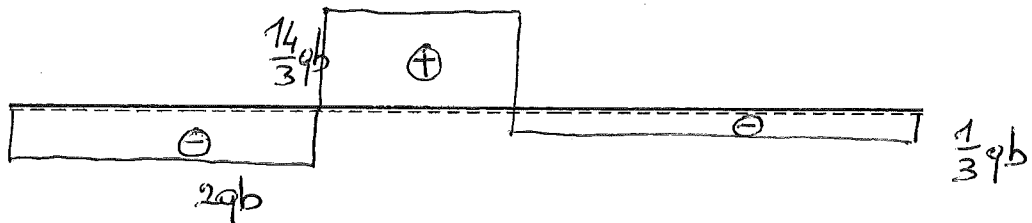
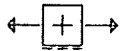
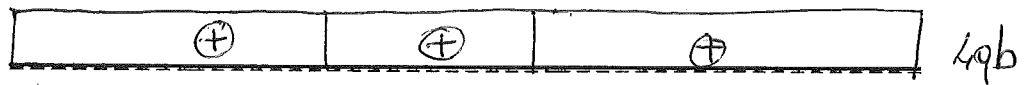
cerchio di Mohr:



$$P_x = (138.5641, 0.0000) \equiv P_1$$

$$P_y = (0.0000, 0.0000) \equiv P_2$$

$$\varphi = \underline{0.0000} \dots (^\circ);$$



$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= \frac{20}{3}qb; V_C(\uparrow) = -5qb; H_D(\Rightarrow) = 4qb; V_D(\uparrow) = \frac{1}{3}qb; M_C(\circlearrowleft) = \frac{2}{3}qb^2; \\
 N_{AB} &= 4qb; T_{AB} = -2qb; M_{AB} = -2qb^2; \\
 N_{CB} &= 4qb; T_{CB} = \frac{14}{3}qb; M_{CB} = \int \left( \frac{2}{3}qb^2 - \frac{14}{3}qb^2x_2 \right); \\
 N_{DC} &= 4qb; T_{DC} = -\frac{1}{3}qb; M_{DC} = \frac{1}{3}qb^2x_3; \\
 v_A &= -\frac{70}{3}qb^4 \quad (\downarrow)
 \end{aligned}$$